ENIT - .

Analyse Numérique _ Corrigé Série 6

EXERCICE 1

Soit A une matrice diagonalisable et $\mu \notin Sp(A)$.

1- cf. polycopié de cours

2- cf. polycopié de cours

3- méthode d'accélération de la convergence de la méthode de la puissance inverse.

1°) on applique quelques itérations de la méthode de la puissance, par exemple 3 itérations, $\Rightarrow$ on obtient $\lambda^{(3)}$ (même notation qu'en cours)

2°) on choisit $\mu = \lambda^{(3)}$, et on applique la méthode de la puissance inverse avec un "shift" égal à $\lambda^{(3)}$. ∎

EXERCICE 2

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définit l'ensemble

$$S = \{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \text{il existe } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},\ Ax = \lambda Bx \}$$

On désire déterminer l'élément de S, noté $s(A,B)$, le <u>plus petit en module</u>.

1- Montrons que si A n'est pas inversible, alors $s(A,B) = 0$.

Si A est non inversible, alors 0 est une valeur propre de A. Et par suite, on a

$$\exists\ x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ tq } Ax = 0 \quad \text{ou encore} \quad Ax = 0.\,Bx .$$

D'où $0 \in S$ et nécessairement on a $s(A,B) = 0$.

2- Dans la suite, on supposera que A et B sont inversibles.

On a : si $\lambda \in S$, alors $\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $Ax = \lambda Bx$. Or A et B étant inversibles, on obtient: $\quad Ax = \lambda Bx \iff B^{-1}Ax = \lambda x$

$$\underset{\lambda \neq 0}{\iff} A^{-1}Bx = \frac{1}{\lambda} x .$$

car sinon $\exists x \neq 0$ tq $Ax = 0$ absurde

Les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont alors les $\frac{1}{\lambda}$, où $\lambda \in S$. Ainsi, la méthode de la puissance appliquée à $A^{-1}B$ donne la plus grande valeur propre en module de $A^{-1}B$, c'est à dire $\frac{1}{s(A,B)}$ $(s(A,B) \neq 0)$. Les hypothèses sont alors:

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{s(A,B)} \qquad \forall \lambda \in S .$$

Soit u_{i_0} le vecteur propre associé à $\frac{1}{s(A,B)}$, alors si $x^{(0)} = \sum \alpha_i u_i$, alors il faut que $\alpha_{i_0} \neq 0$. ∎

EXERCICE 3

Une matrice carrée $H=(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ d'ordre n, est dite de Hessenberg supérieure si : $h_{ij}=0$ pour $i>j+1$:

$$H = \begin{pmatrix} \diagdown\diagdown & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

diagonale

1- Soit R une matrice triangulaire supérieure d'ordre n et soit H une matrice de Hessenberg supérieure. Montrons que RH et HR sont de Hessenberg supérieures.

Montrons que pour $i>j+1$, on a $(RH)_{ij}=0$.

Soit $i>j+1$, $(RH)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} h_{kj} \underset{\substack{\text{R est triang.}\\ \text{supérieure}}}{=} \sum_{k=i}^{n} r_{ik} \underbrace{h_{kj}}_{\substack{=0 \\ \text{car } k\ge i>j+1 \\ \Rightarrow k>j+1}} = 0$

Ce qui prouve que RH est une matrice de Hessenberg supérieure.

De même, on démontre que HR est de Hessenberg supérieure.

2 - On considère l'algorithme QR pour la recherche des valeurs propres d'une matrice A d'ordre n, inversible :

- On pose $A_1 = A$
- On factorise A_k, $k\ge 1$, sous la forme $A_k = \underset{\text{orthogonale}}{Q_k} \underset{\substack{\text{triangulaire}\\ \text{supérieure}}}{R_k}$ (par la méthode de Householder ou de Given
- $A_{k+1} = R_k Q_k$

2_a Montrons que si A est de Hessenberg supérieure, alors toutes les matrices A_k, ainsi que les matrices Q_k le sont aussi.

Par récurrence : Pour $k=1$, $A_1=A$ est de Hessenberg supérieure. Supposons que pour $i\in\{1,\dots,k\}$, A_i est de Hessenberg supérieure et montrons que A_{k+1} est de Hessenberg supérieure. On a :

$$A_{k+1} = R_k Q_k = R_k A_k R_k^{-1}$$

Comme A_k est de Hessenberg supérieure et R_k est triangulaire supérieure, alors d'après 1-, on a $R_k A_k$ de Hessenberg supérieure, et par suite comme R_k^{-1} est triangulaire supérieure, alors utilisant 1-, on a $A_{k+1} = (R_k A_k) R_k^{-1}$ est de Hessenberg supérieure. Ainsi toutes les matrices A_k sont de Hessenberg supérieures. (fin de la récurrence).

(suite exercice 3)

Montrons que toutes les matrices Q_k sont de Hessenberg supérieures.

On a: $Q_k = A_k R_k^{-1}$.

Comme A_k est de Hessenberg supérieure et R_k^{-1} est triangulaire supérieure, alors, d'après 1-, Q_k est de Hessenberg supérieure.

<u>2-b</u> Montrons que si A est tridiagonale symétrique, alors les matrices A_k sont aussi tridiagonales symétriques.

On a $A_{k+1} = R_k Q_k$ et $A_k = Q_k R_k$, d'où

$$(*) \qquad A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k .$$

Pour $k=1$, $A_1=A$ est symétrique. Supposons que pour $i \in \{1,2,\dots,k\}$, A_i est symétrique, et montrons que A_{k+1} est symétrique.

Comme A_k est symétrique, alors il est clair, d'après $(*)$, que A_{k+1} est symétriques.

Ainsi, toutes les matrices A_k sont symétriques.

Par ailleurs, Comme A est symétrique et triadiagonale, alors A est une matrice symétrique et de Hessenberg supérieure. Et par suite, d'après 2-a, toutes les matrices A_k sont de Hessenberg supérieures et symétriques, i.e. tridiagonales et symétriques.

3- On considère l'algorithme QR avec translation pour la recherche des valeurs propres d'une matrice A d'ordre n, inversible:

. On pose $A_1 = A$,

. On détermine la factorisation QR de la matrice $A_k - \nu_k I$:

$$A_k - \nu_k I = Q_k R_k$$

. $A_{k+1} = R_k Q_k + \nu_k I$

où I est la matrice identité, et les nombres ν_k sont définis par un algorithme approprié

<u>3-a</u> Montrons que si A est de Hessenberg supérieure, alors les itérées successives A_k le sont aussi

(suite exercice 3)

Par récurrence : Pour $k=1$, $A_1 = A$ est de Hessenberg supérieure. Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, A_i est de Hessenberg supérieure, et montrons que A_{k+1} est de Hessenberg supérieure.

On a : $A_{k+1} = R_k Q_k + \nu_k I$ et $A_k - \nu_k I = Q_k R_k$.

D'où : $A_{k+1} = R_k (A_k - \nu_k I) R_k^{-1} + \underbrace{\nu_k I}_{\text{diagonale}}$

Or $\left\{ \begin{array}{l} R_k \text{ est triangulaire supérieure} \\ A_k - \nu_k I \text{ est de Hessenberg supérieure} \\ \text{(comme somme d'une matrice de Hessenberg} \\ \text{supérieure et d'une matrice diagonale)} \end{array} \right. \underset{1-}{\Longrightarrow} R_k (A_k - \nu_k I)$ est de Hessenberg supérieure $\underset{1-}{\Longrightarrow} R_k (A_k - \nu_k I) R_k^{-1}$ est de Hessenberg supérieure

et par suite, comme $\nu_k I$ est diagonale, alors A_{k+1} est de Hessenberg supérieure.

Ainsi, toutes les matrices A_k sont de Hessenberg supérieures.

<u>3_b</u> Si A est bidiagonale symétrique, alors toutes les matrices A_k sont bidiagonales symétriques. En effet, on a :

$$A_{k+1} = R_k Q_k + \nu_k I = Q_k^T (A_k - \nu_k I) Q_k + \nu_k I$$

On démontre facilement, par récurrence, que les A_k sont symétriques.

Par ailleurs, on a : A bidiagonale symétrique $\Longrightarrow$ A est de Hessenberg supérieure et symétrique

$\underset{3\text{-}a}{\Longrightarrow}$ A_k est de Hessenberg supérieure et symétrique,

d'où A_k est bidiagonale symétrique. ∎